

## CAPES externe 1982 ( 2<sup>e</sup> composition)

### CORRIGÉ

#### QUESTIONS PRELIMINAIRES

0.1. Soit  $f$  une expansion de  $(\mathcal{A}, d)$ .  $f(M) = f(M') \Rightarrow 0 \leq d(M, M') \leq d(f(M), f(M')) = 0 \Rightarrow d(M, M') = 0 \Rightarrow M = M'$ . Une expansion de  $(\mathcal{A}, d)$  est donc une application injective.

0.2. 
$$\left. \begin{array}{l} f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \\ g \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g \text{ est une application de } \mathcal{A} \text{ vers } \mathcal{A}.$$

De plus :  $d(f \circ g(M), f \circ g(M')) = d(f[g(M)], f[g(M')])$ ,

or  $d(f[g(M)], f[g(M')]) \geq d(g(M), g(M'))$  car  $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$

et  $g(M) \in \mathcal{A}$ ,  $g(M') \in \mathcal{A}$  et  $d(g(M), g(M')) \geq d(M, M')$  car  $g \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ ,  
d'où  $d(f \circ g(M), f \circ g(M')) \geq d(M, M')$  et  $f \circ g \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ .

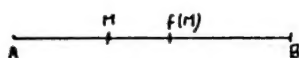
0.3.  $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$  et  $f$  est bijective.

.  $f$  isométrie de  $(\mathcal{A}, d) \Rightarrow d(f(M), f(M')) = d(M, M') \Rightarrow f^{-1}$  existe car  $f$  est bijective,  $f^{-1}$  est une application de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{A}$  vérifiant  $d(f^{-1}(M), f^{-1}(M')) = d(M, M')$ , (car  $f$  bijection de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{A}$  et  $f$  isométrie donc  $f^{-1}$  isométrie) et  $f^{-1} \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ .

.  $f^{-1} \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \left\{ \begin{array}{l} d(M, M') \leq d(f(M), f(M')) \\ f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \end{array} \right\} \Rightarrow d(f^{-1}[f(M)], f^{-1}[f(M')]) \geq d(f(M), f(M'))$   
 $\Rightarrow \forall (M, M') \in \mathcal{A}^2 \quad d(f(M), f(M')) = d(M, M')$  donc  $f$  est une isométrie.

### PREMIERE PARTIE

1.1. a.



$d(A, B) \leq d(f(A), f(B))$  or  $f(A) \in [A, B], f(B) \in [A, B]$   
 $\Rightarrow d(A, B) \geq d(f(A), f(B))$  donc  $d(A, B) = d(f(A), f(B))$   
 $\Rightarrow \{f(A), f(B)\} = \{A, B\}$ .

1.1. b. Une expansion étant injective on sait que  $f(A)$  et  $f(B)$  sont distincts.

Deux cas se présentent :

$(f_1(A) = A, f_1(B) = B)$  ou  $(f_2(A) = B, f_2(B) = A)$ .

Soit  $s$  la symétrie point par rapport au milieu de  $[A, B]$ . So  $f_2$  est une expansion de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{A}$  car toute isométrie de  $(\mathcal{A}, d)$  appartient à  $\text{Exp}(\mathcal{A}, d)$  et  $\text{Exp}(\mathcal{A}, d)$  est stable par composition.

On a alors so  $f_2(A) = A$ , so  $f_2(B) = B$

Déterminons les expansions de  $(\mathcal{A}, d)$  telles que :  $f(A) = A, f(B) = B$

Soit  $M$  un point de  $[A, B]$  et  $f(M)$  son image.

Soit  $a = d(A, B)$ ,  $x = d(A, M)$ ,  $x' = d(A, f(M))$ .

$d(M, B) = a - x$ ,  $d(f(M), B) = a - x'$ .

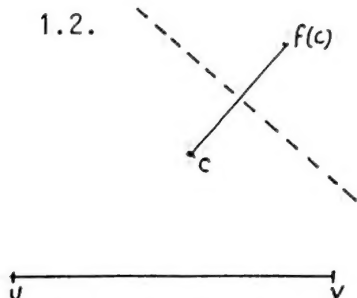
$d(f(M), A) \geq d(A, M) \Rightarrow x' \geq x$

$d(f(M), B) \geq d(M, B) \Rightarrow a - x' \geq a - x \Rightarrow x' \leq x$

$\Rightarrow x = x' \Rightarrow f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ .

1.1. c. On voit donc que  $\text{Exp}(\mathcal{A}, d) \subset \{\text{Id}_{\mathcal{A}}, s\}$ ; or  $\text{Id}_{\mathcal{A}}$  et  $s$  sont des expansions de  $(\mathcal{A}, d)$  d'où  $\text{Exp}(\mathcal{A}, d) = \{\text{Id}_{\mathcal{A}}, s\}$ .

1.2.



$d(U, C) \leq d(U, f(C))$ ,  $d(V, C) \leq d(V, f(C))$

$\Rightarrow \forall \lambda \in [0, 1] \cap \mathbb{R}, d(\lambda U + (1-\lambda)V, C)$

$\leq \lambda d(U, C) + (1-\lambda) d(V, C)$

$\leq \lambda d(U, f(C)) + (1-\lambda) d(V, f(C))$

$\leq d(\lambda U + (1-\lambda)V, f(C))$

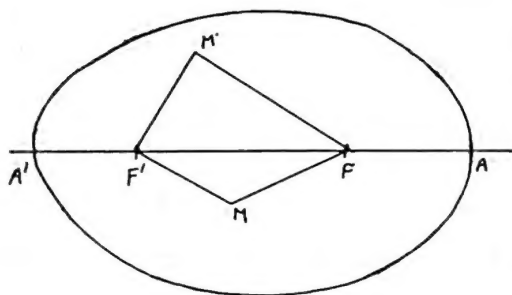
$\leq d(\lambda U + (1-\lambda)V, f(C))$ .

tout ceci car  $d$  est la distance associée à un produit scalaire.

$(d(\lambda U, C) = \|\overline{C - \lambda U}\|)$  qui vérifie  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  et car  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  sont des réels positifs).

On voit donc que tout point de  $[U, V]$  vérifie  $d(M, C) \leq d(M, f(C))$  or ceci est la définition du demi-plan fermé contenant  $C$  et bordé par la médiatrice du segment  $[C, f(C)]$

1.3. a.



On peut supposer  $d(M', F) \geq d(M, F')$  en supposant que des quatre distances  $d(M, F)$ ,  $d(M, F')$ ,  $d(M', F)$ ,  $d(M', F')$  alors  $d(M', F)$  est la plus grande.

Soit  $M$  et  $M'$  deux points de  $\mathcal{A}$ ; on a alors

$$d(M, M') \leq d(M, F') + d(F', M') \leq d(M', F) + d(M', F') \leq 2a$$

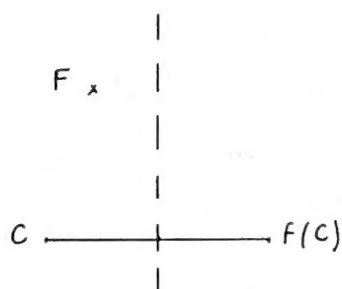
$$d(M, M') = 2a \Rightarrow d(M', F) + d(M', F') = 2a \Rightarrow M' \in (E)$$

$$d(M, M') = 2a \Rightarrow d(M', F) = d(M, F') \Rightarrow d(M, M') = 2a \leq d(M, F) + d(F, M')$$

$$= d(M, F) + d(M, F') \leq 2a \Rightarrow d(M, F) + d(M, F') = 2a \Rightarrow M \in (E).$$

De plus :  $d(M, F') = d(M', F)$  et  $d(M, F) + d(M, F') = 2a \Rightarrow d(M, F) + d(M', F) = 2a = d(M, M')$  donc  $M, M', F$  sont alignés. De même  $M, M', F'$  sont alignés donc  $M, M', F, F'$  sont alignés et  $\{M, M'\} = \{A, A'\}$  car  $M$  et  $M'$  appartiennent à  $(E)$ .

1.3. b.  $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ ,  $f(A) = A$ ,  $f(A') = A'$ . Soit  $C$  un point de  $(E)$  tel que  $f(C) \neq C$ . En utilisant 1.2. on sait que  $[A, A']$  est contenu dans le demi-plan fermé contenant  $C$  et bordé par la médiatrice de  $[C, f(C)]$ .  $F$  et  $F'$  sont des points de  $[A, A']$ . On a donc



$$d(f(C), F) \geq d(C, F) \quad \text{et} \quad d(f(C), F') \geq d(C, F')$$

$$d(f(C), F) + d(f(C), F') \geq d(C, F) + d(C, F') = 2a$$

or  $f(C)$  appartient à  $\mathcal{A}$  c'est-à-dire

$$d(f(C), F) + d(f(C), F') \leq 2a \quad \text{d'où} \quad d(f(C), F) + d(f(C), F') = 2a \quad \text{et} \quad f(C) \text{ appartient à } (E)$$

et dans les deux inégalités  $d(f(C), F) \geq d(C, F)$  et  $d(f(C), F') \geq d(C, F')$  on a égalité.  $F$  et  $F'$  appartiennent alors à la médiatrice de  $[C, f(C)]$  et  $C$  et  $f(C)$  sont symétriques l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe  $AA'$ .

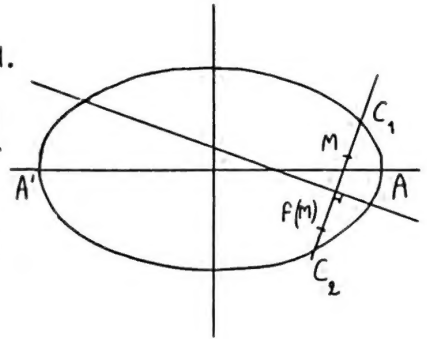
1.3. c.  $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$   $f(A) = A$ ,  $f(A') = A'$ ,  $f(B) = B$ ,  $f(B') = B'$ .

Par 1.3. b. on sait que si  $C$  est un point de  $(E)$  l'image  $f(C)$  de  $C$  est soit  $C$  soit le symétrique orthogonal de  $C$  par rapport à la droite  $AA'$ . Dans le second cas appliquons 1.2. dans le cas  $U = B$ ,  $V = B'$ , la médiatrice de  $[C, f(C)]$  est la droite  $AA'$ ,  $B$  et  $B'$  ne sont pas dans le même demi-plan fermé déterminé par cette médiatrice. Nous avons donc montré :

$$\forall C \in (E) \quad f(C) = C.$$

Soit  $M$  un point de  $\mathcal{A} - (E)$  tel que  $f(M) \neq M$ . La droite  $Mf(M)$  coupe  $(E)$  en deux points  $C_1$  et  $C_2$  tels que  $f(C_1) = C_1$  et  $f(C_2) = C_2$ . Or ils ne sont pas situés dans le même demi-plan fermé délimité par la médiatrice de  $[M, f(M)]$ . Il y a donc contradiction.

$$\forall M \in \mathcal{A} \quad f(M) = M.$$



1.3. d. Si  $u$  est une isométrie de  $(\mathcal{A}, d)$  alors :

$$\forall f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \quad \text{ou } f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \quad (\text{question 0.2})$$

Soit  $f$  un élément de  $\text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ . Par 1.3. a.  $d(f(A), f(A')) \geq d(A, A') = 2a$   
 $\Rightarrow \{f(A), f(A')\} = \{A, A'\}$ . Si  $f(A) = A'$ ,  $f(A') = A$  alors  $f$  avec  $s$  symétrie orthogonale par rapport à  $BB'$  vérifie :

so  $f(A) = A$ , so  $f(A') = A'$ , so  $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$  ;

donc si  $G_1 = \{f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d), f(A) = A, f(A') = A'\}$ ,

$\text{Exp}(\mathcal{A}, d) = G_1 \cup sG_1$ ,  $sG_1 = \{so f, f \in G_1\}$ . Déterminons  $G_1$ . Soit  $f$

appartenant à  $G_1$ ,  $B$  et  $B'$  sont tels que  $f(B) = B$  ou  $f(B) = B'$  (conséquence de 1.3.b. dans le cas où  $B = C$ ). De même  $f(B') = B'$  ou  $f(B') = B$ .

\*  $f \in G_1$ ,  $f(B) = B$ ,  $f(B') = B'$  alors  $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$  par 1.3.c.

\*  $f \in G_1$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(B') = B$  alors si  $s'$  désigne la symétrie orthogonale par rapport à  $AA'$ ,  $s'o$  vérifie :  $s'o f(B) = B$ ,  $s'o f(B') = B'$  ;

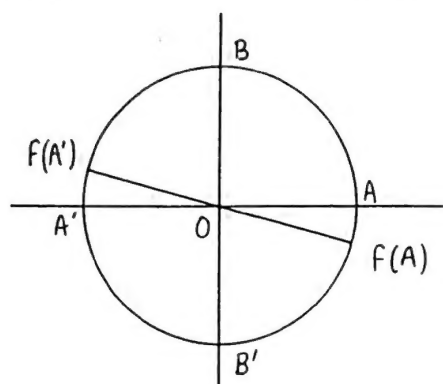
donc  $s'o f$  vaut l'identité de  $\mathcal{A}$  et  $f$  coïncide avec  $s'$  ( $s'^2 = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ ).

Nous avons donc montré :  $G_1 = \{\text{Id}_{\mathcal{A}}, s'\}$  ;  $G = \{\text{Id}_{\mathcal{A}}, s', s, s's\}$

où  $s'$  est la symétrie orthogonale par rapport au grand axe de  $(E)$ ,  $s$  est la symétrie orthogonale par rapport au petit axe de  $(E)$ ,  $s's = ss'$  est la symétrie par rapport au centre de  $(E)$ .

1.4. Remarquons que :  $(M, M') \in \mathcal{A}^2 \Rightarrow d(M, M') \leq d(M, 0) + d(0, M') \leq 2R$ , si  $R$  désigne le rayon du cercle de centre  $(0)$  bordant  $\mathcal{A}$  ; et  $d(M, M') = 2R \Rightarrow d(M, 0) = d(0, M') = R$  et  $0, M, M'$  alignés et distincts c'est-à-dire  $M$  et  $M'$  diamétralement opposés.

Soient  $A$  et  $A'$  les extrémités d'un diamètre alors  $f(A)$  et  $f(A')$  sont



deux points diamétralement opposés du cercle et distincts ( $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d) \Rightarrow f$  bijective et  $d(f(A), f(A')) \geq d(A, A')$ ). Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  telle que  $r(f(A)) = A$ . Alors  $r(f(A')) = A'$  et de plus

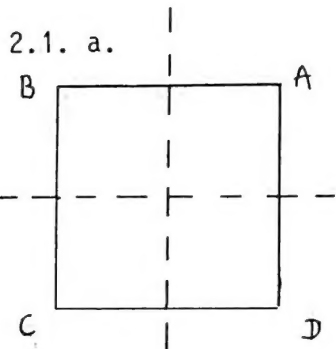
$\forall f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d)$ . Nous sommes ramenés au cas où  $f(A) = A$ ,  $f(A') = A'$ . Soit  $C$  un point du cercle tel que  $f(C) \neq C$  alors le

même raisonnement qu'en 1.3.b. montre que  $f(C)$  est le symétrique de  $C$  par la symétrie orthogonale d'axe  $AA'$ . Soit  $BB'$  le diamètre du cercle orthogonal à  $AA'$ . On a alors  $f(B) = B$  et  $f(B') = B'$ , ou  $f(B) = B'$  et  $f(B') = B$ . On en conclut comme en 1.3.d. et 1.3.c. que

$G_1 = \{f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, d), f(A) = A, f(A') = A'\} = \{\text{Id}_{\mathcal{A}}, s\}$ , où  $s$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $AA'$  donc  $G \subset \{r, \text{so } r, r \text{ rotations de centre } O\}$ . L'inclusion inverse est triviale et en remarquant que l'ensemble  $\{\text{so } r, r \text{ rotations de centre } O\}$  coïncide avec l'ensemble des symétries orthogonales d'axe contenant  $O$  on obtient :

$$G = \{\text{rotations de centre } O\} \cup \{\text{symétries orthogonales d'axe contenant } O\}.$$

## DEUXIEME PARTIE



Remarquons que deux points de  $\Gamma$ ,  $M$  et  $M'$ , sont sur deux côtés distincts et parallèles du carré  $ABCD$  si et seulement si  $\delta(M, M') = 2$ .

$g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta) \Rightarrow \delta(g(M), g(M')) = \delta(M, M') = 2$   
 $\Rightarrow g(M)$  et  $g(M')$  sont situés sur deux côtés distincts et parallèles du carré  $ABCD$ .

Démontrons notre remarque :

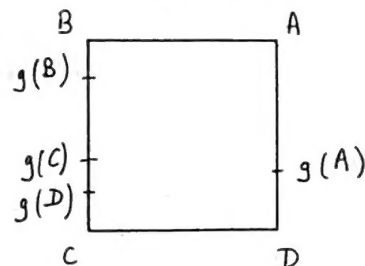
$$\forall (M, M') \in \Gamma^2 \quad \delta(M, M') \leq \delta(M, O) + \delta(O, M') \leq 1 + 1 \leq 2$$

. Réciproquement :  $\delta(M, M') = 2$  avec  $(M, M') \in \Gamma^2 \Rightarrow \delta(M, O) = \delta(O, M') = 1$   
 $\Rightarrow M$  et  $M'$  appartiennent aux segments du quadrilatère  $A, B, C, D$ .

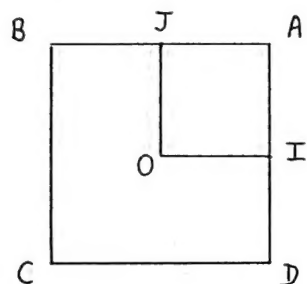
$\delta(M, M') = 2 \Rightarrow$  par exemple  $|x - x'| = 2$  or  $|x| \leq 1$ ,  $|x'| \leq 1$  d'où  
 $2 = |x - x'| \leq |x| + |x'| \leq 2$  donc  $|x| = |x'| = 1$  et  $|x - x'| = 2$  et  
 $x = \varepsilon x' = \varepsilon' 1$  ( $\varepsilon, \varepsilon' \in \{+1, -1\}$ ).

Considérons  $A$  et montrons que son image par un élément  $g$  de  $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$  appartient à  $\{A, B, C, D\}$ .  $A$  et  $B$  constituent une paire de points situés sur deux segments distincts et parallèles du quadrilatère  $A, B, C, D$ . Il en est de même de  $A$  et  $D$ , les deux segments considérés alors étant les deux autres segments du quadrilatère  $A, B, C, D$ ; il en est de même de  $A$  et  $C$ .

La première partie de cette question nous permet d'affirmer que les images  $g(A)$ ,  $g(B)$ ,  $g(C)$ ,  $g(D)$  des points  $A, B, C, D$  par  $g$  appartiennent aux côtés du quadrilatère  $A, B, C, D$ . Si  $g(A)$  n'est pas un sommet alors  $g(B)$ ,  $g(C)$ ,  $g(D)$  appartiennent nécessairement au côté opposé à celui auquel appartient  $g(A)$  : ce sont trois points distincts de ce côté ( $g$  bijective) or sur ce côté il n'y a que deux points à distance 2 l'un de l'autre, les deux sommets car  $\delta(g(B), g(C)) = \delta(B, C) = 2$ ,  $\delta(g(C), g(D)) = \delta(C, D) = 2$ . Nous avons donc montré que  $g(A)$  est un sommet. De la même façon on montre que  $g(B)$ ,  $g(C)$ ,  $g(D)$  sont des sommets.



2.1. b.  $g(A) = A \Rightarrow g(C) \in \{B, C, D\}$  par la question précédente et le fait que  $g$  est bijective. Supposons  $g(C) = B$ .  
 $\{M \in \Gamma, \delta(M, A) = \delta(M, C) = 1\} = \{O\}$   
car  $\{M \in \Gamma, \delta(M, A) = 1\} = [O, I] \cup [O, J]$   
avec  $I(1, 0)$  et  $J(0, 1)$   $\{M \in \Gamma, \delta(M, A) = \delta(M, B) = 1\} = [O, J]$ .  $g$  étant bijective et isométrique on devrait avoir si  $g(C) = B$  :



$\{M \in \Gamma, \delta(M, A) = \delta(M, C) = 1\} = \{M \in \Gamma, \delta(M, A) = \delta(M, B) = 1\}$  ce qui n'est pas. On a donc  $g(C) \neq B$  ; de même  $g(C) \neq D$  donc  $g(C) = C$ .

2.1. c. On sait que  $G$  est constitué de l'ensemble des rotations de centre  $O$  et d'angles respectifs  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$  et de l'ensemble des symétries par rapport aux droites  $OI, OJ, AC, BD$  et de l'identité. Il suffit de remarquer que  $\forall f \in G \quad f/\Gamma \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ .

2.1. d. Soit  $g$  appartenant à  $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ .  
Si  $g(A) \neq A$ , soit la rotation  $r$  de centre  $O$  telle que  $r(A) = g(A)$  ;  $r$  appartient à  $G$  et par les questions 0.2 et 0.3 et 2.1. c.  $r^{-1} \circ g$  appartient à  $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$  et vérifie  $r^{-1} \circ g(A) = A$  et donc  $r^{-1} \circ g(C) = C$  par 2.1. b. On a alors  $\{r^{-1} \circ g(B), r^{-1} \circ g(D)\} \subseteq \{B, D\}$ . Si  $r^{-1} \circ g(B) \neq B$  alors considérons la symétrie  $s$  par rapport à  $AC$ . Soit  $r^{-1} \circ g$  vérifie :

$$\begin{cases} \text{soit } r^{-1} \circ g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta) & \text{avec } s \circ r^{-1} \in G \\ \text{soit } r^{-1} \circ g \text{ laisse fixes } A, B, C, D. \end{cases}$$

Si  $r^{-1} \circ g(B) = B$  alors  $f = r^{-1}$ .

$\forall g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta) \exists f \in G \quad f \circ g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta) \text{ et } f \circ g \text{ laisse fixes } A, B, C, D.$

2.1. e.  $g \in \mathcal{I}(\Gamma, \delta)$ ,  $g(A) = A$  ;  $g(B) = B$  ;  $g(C) = C$  ;  $g(D) = D$ .

Soit  $M \in [A, B]$ , alors  $g(M)$  appartient à  $[A, B]$  car

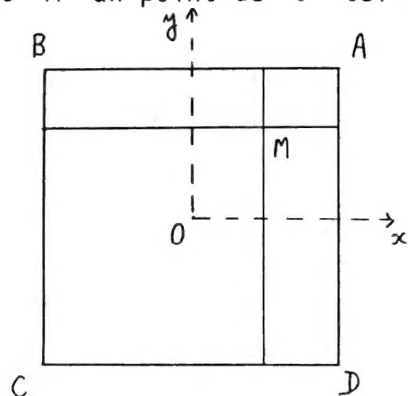
$$\delta(g(M), C) = \delta(M, C) = 2 \quad , \quad \delta(g(M), D) = \delta(M, D) = 2 \quad .$$

Puis  $\delta(g(M), A) = \delta(M, A)$  ,  $\delta(g(M), B) = \delta(M, B)$  , c'est-à-dire :

$$1 - x_M = 1 - x_{g(M)} \quad \text{d'où} \quad x_M = x_{g(M)} \quad . \quad \text{On voit donc que } g|_{[A, B]} = \text{Id}_{[A, B]} .$$

Il en est de même pour les restrictions de  $g$  aux autres côtés du quadrilatère  $A, B, C, D$ .

Soit  $M$  un point de  $\Gamma$  tel que  $x_M \geq 0$  et  $y_M \geq 0$ . Alors  $g(M)$  vérifie :



$$\forall P \in [C, D] \quad \delta(g(M), P) = \delta(M, P) \geq 1 + y$$

$$= \delta(M, [C, D])$$

$$\text{car } \delta(M, [C, D]) = \inf (\sup (1 + y, |x - a|)),$$

$$-1 \leq a \leq 1$$

$$\text{d'où } \delta(g(M), [C, D]) = \delta(M, [C, D]) = 1 + y = 1 + y' ,$$

si  $g(M)$  a pour coordonnées  $(x', y')$ .

Donc  $y = y'$ . En considérant  $[A, D]$  on

obtient  $x = x'$ .

2.1. f. On a vu que :  $\forall g \in \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \exists f \in G \quad fog \in \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \quad fog = \text{Id}_{\Gamma}$  (par 2.1.e)

On a donc  $\forall g \in \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \exists f \in G \quad g = f^{-1}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \subset G \\ G \subset \mathcal{I}(\Gamma, \delta) \end{array} \right\} \Rightarrow G = \mathcal{I}(\Gamma, \delta) .$$

2.2. a.  $G \subset \{f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta) / f(0) = 0\}$  par 2.1. c.

En fait  $\forall f \in G \quad \forall (M, M') \in \mathcal{E}^2 \quad \delta(f(M), f(M')) = \delta(M, M')$

Soit  $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ ,  $f(0) = 0$  ; alors :  $\forall M \in \Gamma \quad \delta(f(M), 0) = \delta(M, 0) \leq 1$

$\Rightarrow f(\Gamma) \subset \Gamma \Rightarrow f|_{\Gamma} \in \mathcal{I}(\Gamma, \delta)$  car  $f$  est bijective ( $f^{-1} \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta), f^{-1}(0) = 0$ ).

Par 2.1. f. on a donc :  $f$  appartient à  $G$ .

2.2. b. Soit un élément  $f$  de  $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$ . Considérons la translation  $t$  de vecteur  $\overrightarrow{f(0)0}$ .  $t$  est un élément de  $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$  et on a :

$$\text{to } f \in \mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta), \text{ to } f(0) = 0 \Rightarrow \text{to } f \in G \Rightarrow f \in t^{-1} G .$$

Un élément de  $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$  est soit un élément de  $G$  soit le composé d'une translation et d'un élément de  $G$ . En utilisant les décompositions d'une translation en produit de symétries par rapport à deux droites parallèles, l'une d'entre elles étant donnée de façon arbitraire on en conclut que les éléments de  $\mathcal{I}(\mathcal{E}, \delta)$  sont :  
 . les symétries par rapport aux droites parallèles à l'une des quatre droites suivantes :  $x=0, y=0, x+y=0, x-y=0$   
 . les rotations d'angle  $k\pi/2$  ( $k=0, 1, 2, 3$ )

de centre quelconque

. les translations.



2.3. a.  $\sigma$  est une application affine bijective dont l'application linéaire associée a pour matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  de déterminant 2 non nul ;  
 $d_1(M, M') = |x - x'| + |y - y'|$ ,  $\delta(\sigma(M), \sigma(M')) = \text{Sup}(|x + y - x' - y'|, |-x + x' + y - y'|)$   
 $= \text{Sup}(|(x - x') + (y - y')|, |-(x - x') + (y - y')|)$   
 or  $|a| + |b| = \text{Sup}(|a + b|, |a - b|)$  d'où l'égalité demandée.

2.3. d.  $f \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta) \stackrel{?}{\Rightarrow} \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1)$ .  
 $\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma$  est une bijection.

$d_1(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M), \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M')) = \delta(\sigma(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M)), \sigma(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma(M')))$   
 $= \delta(f \circ \sigma(M), f \circ \sigma(M')) = \delta(\sigma(M), \sigma(M')) = d_1(M, M')$  en utilisant 2.3. a. et  
 $f$  élément de  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$ .  $\sigma^*$  est donc bien défini.

$\sigma^*$  est un homomorphisme de groupes

$$\sigma^*(f \circ g) = \sigma^{-1} \circ f \circ g \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ g \circ \sigma = \sigma^*(f) \circ \sigma^*(g).$$

$\sigma^*$  est injectif :

$$\sigma^*(f) = \sigma^*(g) \Rightarrow \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ g \circ \sigma \Rightarrow f = g$$

$\sigma^*$  est surjectif :

$g \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1) \Rightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$  car  $\sigma \circ g \circ \sigma^{-1}$  est une bijection et  
 $\delta(\sigma \circ g \circ \sigma^{-1}(M), \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}(M')) = d_1(g \circ \sigma^{-1}(M), g \circ \sigma^{-1}(M'))$   
 $= d_1(\sigma^{-1}(M), \sigma^{-1}(M')) = \delta(\sigma \circ \sigma^{-1}(M), \sigma \circ \sigma^{-1}(M')) = \delta(M, M')$ .

Montrons que  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1) = \mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$ .  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1) = \sigma^*(\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta))$ .

Remarquons que  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$  et  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1)$  contiennent tous deux les translations (l'image par  $\sigma^*$  d'une translation est une translation) et on avait

$\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta) = G \cup TG$ ,  $T$  ensemble des translations et  $TG = \{t \circ g, t \in T, g \in G\}$   
 donc  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1) = \sigma^*(G) \cup T \sigma^*(G)$ .

$\sigma^*(G)$  est un sous-groupe de  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1)$  de cardinal 8 comme  $G$  ( $\sigma^*$  est un homomorphisme bijectif de groupes). Déterminons  $\sigma^*(r)$  où  $r$  est la rotation de centre 0 et angle  $\pi/2$ .

$\sigma^*(r) = \sigma^{-1} \circ r \circ \sigma = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma\right)^{-1} \circ r \circ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma\right)$  car  $\sigma$  est la composée de la rotation de centre 0 et d'angle  $-\pi/4$  et de l'homothétie de centre 0 et rapport  $\sqrt{2}$ ,  $\sigma$  et  $r$  commutent donc et  $\sigma^*(r) = r$ .  $G$  étant engendré par  $r$  et la symétrie  $s$ , par rapport à  $AC$ ,  $\sigma^*(G)$  est engendré par  $\sigma^*(r)$  et  $\sigma^*(s)$ .

$\sigma^*(s) = \sigma^{-1} \circ s \circ \sigma = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma\right)^{-1} \circ s \circ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma\right) = s_{0x}$ .  $G$  étant aussi engendré par  $r$  et la symétrie  $s_{0x}$  par rapport à la droite  $y = 0$ , on obtient :

$$\sigma^*(G) = G.$$

$$\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1) = G \cup TG = \mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta).$$



## TROISIEME PARTIE

3.1. a. Sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $g : x \rightarrow x^p$  est continue, deux fois dérivable et on a :

$$g''(x) = p(p-1)x^{p-2} ; p > 1 \Rightarrow p(p-1) > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) > 0$$

La fonction  $g$  est donc strictement convexe sur  $\mathbb{R}_+$  et on a alors :

$$\forall (a, x) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in ]0, 1[^2 \quad \alpha + \beta = 1 \quad (\alpha a + \beta x)^p < \alpha a^p + \beta x^p$$

On a égalité de plus pour  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$  et uniquement pour ces valeurs lorsque  $a$  et  $x$  sont distincts. Si  $a = x$  on a égalité dans tous les cas.

3.1. b. L'étude faite en 3.1. a. appliquée à  $|x|$ ,  $|x'|$ ,  $|y|$ ,  $|y'|$  nous donne :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \alpha + \beta = 1 \quad |x''|^p + |y''|^p \leq 1$$

car on a les inégalités :  $|x''|^p \leq \alpha |x|^p + \beta |x'|^p$  (1) ;

$$|y''|^p \leq \alpha |y|^p + \beta |y'|^p \quad (2) .$$

Dans le cas où il y a égalité, il y a égalité dans chacune des inégalités (1) et (2) c'est-à-dire que l'on a  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 0$ , cas triviaux, ou bien

$$\text{lorsque } |x| = |x'| = |\alpha x + \beta x'| = \alpha |x| + \beta |x'|$$

$$|y| = |y'| = |\alpha y + \beta y'| = \alpha |y| + \beta |y'|$$

c'est-à-dire  $x = x'$ ,  $y = y'$ .

3.1. c. Pour montrer que  $N_p$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  nous devons montrer que :

$$(1) \quad N_p(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad , \quad (2) \quad \forall \vec{u}, N_p(\vec{u}) \geq 0$$

$$(3) \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}), N_p(\vec{u} + \vec{v}) \leq N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v}), \quad (4) \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N_p(\lambda \vec{u}) = |\lambda| N_p(\vec{u})$$

$$(2) \quad N_p(\vec{u}) \geq 0 \quad \text{c'est évident}$$

$$(4) \quad N_p(\lambda \vec{u}) = (|\lambda x|^p + |\lambda y|^p)^{1/p} = \left[ |\lambda|^p (|x|^p + |y|^p) \right]^{1/p} \\ = |\lambda| N_p(\vec{u})$$

$$(1) \quad N_p(\vec{u}) = 0 \Rightarrow |x|^p + |y|^p = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$(3) \quad N_p(\vec{u} + \vec{v}) = N_p \left( N_p(\vec{u}) \frac{\vec{u}}{N_p(\vec{u})} + N_p(\vec{v}) \frac{\vec{v}}{N_p(\vec{v})} \right) \quad \text{si } \begin{matrix} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{matrix}$$

$$= N_p \left[ (N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v}))(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \right] \quad \text{avec } \alpha + \beta = 1, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, \\ N_p(\vec{u}) = N_p(\vec{v}) = 1$$

En utilisant :  $N_p(\lambda \vec{u}) = |\lambda| N_p(\vec{u})$  et 3.1.b. on obtient avec

$$\lambda = N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v}) .$$

$$N_p(\vec{u} + \vec{v})^p \leq (N_p(\vec{u}) + N_p(\vec{v}))^p (N_p(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}))^p$$

En utilisant 3.1.b. pour  $\vec{U}, \vec{V}, \alpha$  et  $\beta$  réels positifs,  $\alpha + \beta = 1$ ,  
 $N_p(\alpha \vec{U} + \beta \vec{V})^P \leq 1$ ,  $N_p(\vec{U} + \vec{V})^P \leq [N_p(\vec{U}) + N_p(\vec{V})]^P$ , d'où  $N_p(\vec{U} + \vec{V}) \leq N_p(\vec{U}) + N_p(\vec{V})$   
 avec égalité si et seulement si  $\vec{U} = \vec{0}$  ou  $\vec{V} = \vec{0}$  ou  $\vec{U} = \vec{V}$  c'est-à-dire  
 $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  positivement liés ( $\vec{U} N_p(\vec{V}) = \vec{V} N_p(\vec{U})$ ).

3.2. Soient  $M, N$  et  $P$  trois points alignés de  $\mathcal{E}$  mais tels que  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{NP}$  soient positivement liés. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$  : on sait que  $f$  est une bijection.

Montrons que  $f$  conserve l'alignement ce qui prouvera que  $f$  appartient au groupe affine de  $\mathcal{E}$  en utilisant le théorème suivant :

*Toute bijection de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  conservant l'alignement est une application affine.*

$$d_p(f(M), f(N)) = d_p(M, N) \quad ; \quad d_p(f(N), f(P)) = d_p(N, P) ;$$

$$d_p(f(M), f(P)) = d_p(M, P) \text{ et } d_p(M, P) = d_p(M, N) + d_p(N, P) \text{ entraîne}$$

$$d_p(f(M), f(P)) = d_p(f(M), f(N)) + d_p(f(N), f(P)) \text{ et en utilisant 3.1.c,}$$

$\overrightarrow{f(M) f(N)}$  et  $\overrightarrow{f(N) f(P)}$  sont positivement liés c'est-à-dire  $f(M), f(N), f(P)$  alignés.  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$  est inclus dans le groupe affine ; c'est de toute évidence un groupe.

Toutes les translations appartenant à  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$  et à  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$  et les parties linéaires des éléments de  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$  et des éléments de  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$  coïncidant, nous avons montré que

$$\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta) = \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) .$$

#### QUATRIÈME PARTIE

4.1.  $\mathcal{A}$  partie bornée de  $\mathcal{E}$  .

4.1. a.  $A \in \mathcal{A}$  . Considérons la suite  $(f^p(A))_{p \in \mathbb{N}}$  . Cette suite est contenue dans  $\mathcal{A}$  donc est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme que toute suite bornée de  $\mathbb{R}^n$  admet au moins une valeur d'adhérence c'est-à-dire qu'en particulier la suite  $(f^p(A))_{p \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite convergente donc de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p_1 < p_2 \quad D(f^{p_2}(A), f^{p_1}(A)) < \epsilon$$

Considérons  $f^{p_1}$  ; c'est une expansion de  $\mathcal{A}$  et on a donc

$$D(f^{p_2 - p_1}(A), A) < D(f^{p_2}(A), f^{p_1}(A)) < \epsilon$$

c'est-à-dire  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exists k \in \mathbb{N}^*$   $D(A, f^k(A)) < \epsilon$  .

Pour démontrer la deuxième propriété considérons  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  muni de la distance  $D'$  :

$$D'((M,N), (M',N')) = D(M,M') + D(N,N')$$

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  est alors muni d'une expansion  $f' : f'(M,N) = (f(M), f(N))$ .

En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite  $(f^p(A,B))_{p \in \mathbb{N}}$  on obtient :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D'((A,B), (f^k(A), f^k(B))) < \varepsilon$$

$$\text{d'où } \forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D(A, f^k(A)) < \varepsilon, \quad D(B, f^k(B)) < \varepsilon$$

4.1. b. Reprenons la propriété écrite à la fin de la question 4.1.a.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D(f(A), f(B)) \leq D(f^k(A), f^k(B))$$

$$\leq D(f^k(A), A) + D(A,B) + D(B, f^k(B)) \leq 2\varepsilon + D(A,B)$$

On a donc :  $D(f(A), f(B)) \leq D(A,B)$ . L'inégalité inverse provient du fait que  $f$  est une expansion de  $\mathcal{A}$ . Nous avons montré :

$$\forall f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, D) \quad D(f(A), f(B)) = D(A,B)$$

Pour montrer que  $f$  a une image dense dans  $\mathcal{A}$  il suffit de remarquer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad D(A, f^k(A)) < \varepsilon$$

c'est-à-dire en remarquant que  $f^k(A) = f[f^{k-1}(A)]$

3.3.  $f \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) \Rightarrow$  la partie linéaire  $g$  de  $f$  conserve la norme  $N_p$ . Soit  $\mathcal{M}$  sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2 (\vec{i}, \vec{j})$

$$\left. \begin{array}{l} N_p(g(\vec{i})) = N_p(\vec{i}) \\ N_p(g(\vec{j})) = N_p(\vec{j}) \end{array} \right\} \Rightarrow |a|^p + |b|^p = |c|^p + |d|^p = 1$$

Ceci entraîne :  $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1, |d| \leq 1$ , d'où

$$|\det \mathcal{M}| = |ad - bc| \leq 1 + 1 = 2; \quad f^{-1} \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) \Rightarrow |\det \mathcal{M}|^{-1} \leq 2;$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f^n \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p) \Rightarrow |\det \mathcal{M}|^n \leq 2. \quad \text{On a donc } |\det \mathcal{M}| = 1.$$

$f^{-1} \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$  et sa partie linéaire a pour matrice  $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$  donc on a

$$|d|^p + |b|^p = |c|^p + |a|^p = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} |d|^p + |b|^p = |c|^p + |a|^p = 1 \\ |a|^p + |b|^p = |c|^p + |d|^p = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow |a|^p = |d|^p \Rightarrow |b|^p = |c|^p$$

d'où  $|a| = |d|$  et  $|b| = |c|$ ;  $d = \varepsilon a \quad \varepsilon \in \{+1, -1\}$ ;  $c = \varepsilon' b \quad \varepsilon' \in \{+1, -1\}$ ;

$$\Rightarrow \det \mathcal{M} = \varepsilon a^2 - \varepsilon' b^2 = \pm 1$$

$$\varepsilon = -\varepsilon' \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$\varepsilon = \varepsilon' \Rightarrow |a^2 - b^2| = 1 \quad \text{or} \quad |a| \leq 1, |b| \leq 1 \Rightarrow |a^2 - b^2| = 1 \Rightarrow a = 0$$

ou  $b = 0$  et alors  $a^2 + b^2 = 1$ .

La matrice  $\mathcal{M}$  est alors telle que :  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ ;  $|\det \mathcal{M}| = 1$ .

En fait nous avons même obtenu plus :

$$M = \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ b & -\varepsilon a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \in \{+1, -1\}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Ceci nous montre que  $M$  est une matrice orthogonale.

L'égalité :  $a^2 + b^2 = |a|^p + |b|^p = 1$  nous permet d'affirmer que  $a$  vaut 0, 1, ou -1. En effet :

$$\left. \begin{array}{l} |a| < 1 \Rightarrow |a|^p < |a|^2 \quad \text{pour } p > 2 \\ |b| < 1 \Rightarrow |b|^p < |b|^2 \quad \text{pour } p > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow |a|^p + |b|^p < 1.$$

Nécessairement si  $p > 2$   $|a| = 1$  ou  $|b| = 1$ . Si  $|a| = 1$  alors  $a$  vaut +1 ou -1 et  $b$  vaut 0. Si  $|b| = 1$ ,  $a$  vaut 0 et  $b$  vaut +1 ou -1. Si  $p$  est strictement compris entre 1 et 2 :

$$\left. \begin{array}{l} |a| < 1 \Rightarrow a^2 < |a|^p \\ |b| < 1 \Rightarrow b^2 < |b|^p \end{array} \right\} \Rightarrow |a|^p + |b|^p > 1$$

donc nécessairement  $|a|$  vaut 1 ou  $|b|$  vaut 1. Et on arrive à la même conclusion.

Les parties linéaires des éléments de  $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$  pour  $p > 1$ ,  $p \neq 2$  sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon' \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon, \varepsilon') \in \{+1, -1\}^2$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists B \in \text{Im } f \quad D(A, B) < \varepsilon.$$

$f$  application conservant la distance est continue de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{A}$  est compact,  $f(\mathcal{A})$  est un compact de  $\mathcal{B}$ .

$f(\mathcal{A})$  dense dans  $\mathcal{B} \Rightarrow \overline{f(\mathcal{A})} = \mathcal{B}$  or  $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$  car  $f(\mathcal{B})$  compact donc  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ .

$f$  expansion de  $(\mathcal{A}, D)$  est injective (question 0.1), surjective car  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ , conserve  $D$ ; c'est donc une isométrie de  $(\mathcal{A}, D)$ .

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ compact} \Rightarrow \text{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathcal{J}(\mathcal{A}, D)} \quad , \text{ l'autre inclusion étant}$$

triviale.

4.2. a. Soit :  $A$  appartient à  $\overline{\mathcal{A}}$ . Il existe une suite de Cauchy  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  ayant pour limite  $A$ . La suite  $(f(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$  est encore une suite de Cauchy,  $f$  conservant la distance (question 4.1.b). Définissons  $\bar{f}(A)$  comme la limite de la suite  $(f(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$ . Par construction  $\bar{f}(A)$  dépend de la suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  choisie mais en fait il n'en est rien : si  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(A'_p)_{p \in \mathbb{N}}$  sont deux suites convergeant vers  $A$  posons  $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définie par :  $B_{2n} = A_n$  ;  $B_{2n+1} = A'_n$ .

Alors la suite  $(f(B_p))_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers la limite de  $(f(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$  et la limite de  $(f(A'_p))_{p \in \mathbb{N}}$ .

$\bar{f}$  par construction préserve la distance  $D$ . Déterminons l'image de  $\bar{f}$ ; l'image de  $\bar{f}$  est dense dans  $\bar{\mathcal{A}}$  or  $\bar{f}$  étant continue de  $\bar{\mathcal{A}}$  dans  $\bar{\mathcal{A}}$ ,  $\bar{\mathcal{A}}$  étant compact (partie fermée bornée)  $\bar{f}(\bar{\mathcal{A}})$  est un compact dense de  $\bar{\mathcal{A}}$ , c'est donc  $\bar{\mathcal{A}}$ . Nous avons donc montré que  $\bar{f}$  appartient à  $\mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}}, D)$ .

4.2. b. Pour montrer que  $\text{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathcal{J}(\mathcal{A}, D)$  il suffit de montrer que, tout élément de  $\text{Exp}(\mathcal{A}, D)$  étant injectif et isométrique,

$$\forall f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, D) \quad f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

Pour cela, étant donné que  $\bar{f}|_{\mathcal{A}} = f$ ;  $\bar{f}(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{\mathcal{A}}$ ;  $\bar{\mathcal{A}} = (\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) \cup \mathcal{A}$ , nous allons montrer que  $\bar{f}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bar{f}^{-1} \in \mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}}, D) \\ f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{f}^{-1}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) \subset \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}.$$

En effet,  $\bar{f}^{-1} \in \mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}}, D) \Rightarrow \forall A \in \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}, \bar{f}^{-1}(A) \in \bar{\mathcal{A}}$ ; si  $\bar{f}^{-1}(A)$  n'appartient pas à  $\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$  alors  $\exists B \in \mathcal{A}, \bar{f}^{-1}(A) = B \Rightarrow A = \bar{f}(\bar{f}^{-1}(A)) = f(B) = \bar{f}(B) \in \mathcal{A}$  contradiction. On a donc la conclusion.

$\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} \cap {}^c \mathcal{A}$  est un fermé comme intersection de fermés car  $\mathcal{A}$  est ouvert.  $\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$  est un fermé borné donc un compact. Alors utilisons 4.1.b.

$$\bar{f}^{-1}|_{\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}} \in \mathcal{J}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}, D)$$

En particulier  $\bar{f}^{-1}$  est une bijection de  $\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$  sur lui-même c'est-à-dire

$$\bar{f}^{-1}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}) = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}.$$

4.3. a.  $\mathcal{E} = \mathbb{R}$   $D(x, y) = |x - y|$   $\mathcal{A} = ]0, +\infty[$ , et  $f$  l'expansion de  $(\mathcal{A}, D)$  définie par  $x \mapsto x + 1$ . Alors  $f$  conserve  $D$  mais n'est pas une isométrie de  $(\mathcal{A}, D)$  car  $f(\mathcal{A}) = ]1, +\infty[ \subsetneq \mathcal{A}$ .

4.3. b. Soit  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne et  $\mathcal{A} = \{(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in \mathbb{N}\}$ .  $\mathcal{A}$  est bornée. Soit  $f$  la rotation de centre 0 et d'angle 1 radian;  $f$  conserve la distance.  $f(\mathcal{A}) \subsetneq \mathcal{A}$  car  $(1, 0) \notin f(\mathcal{A})$ .  $(1, 0) \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{N} \quad e^{i(\theta+1)} = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{N} \quad \theta + 1 \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \pi$  rationnel, ce qui n'est pas.